上海科技大学2019年攻读硕士学位研究生

招生考试试题

科目代码：992　　　　　　　　　科目名称：数值代数

考生须知：

1. 本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、考虑矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 2 & 3\\ 1 & 5 & -4 & -1\\ 6 & 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

1. 找出一个单位下三角阵$L\in\mathbb{R}^{4\times4}$和一个上三角阵$U\in\mathbb{R}^{4\times4}$，使得$A=LU$。（8分）

2. 使用题 1 中获得的LU分解（即三角分解），求解线性方程组$Ax=y$，其中$y=[0\quad 0\quad 1\quad 0]^T$。（8分）

3. 求A的行列式。（4分）

4. 题 1 获得的$L\in\mathbb{R}^{4\times4}$和$U\in\mathbb{R}^{4\times4}$是否是唯一满足$A=LU$的单位下三角阵和上三角阵？为什么？（5分）

5. 是否存在一个A的 Cholesky 分解？如果你认为存在，求出该 Cholesky 分解；如果你认为不存在，请说明理由。（5分）

二、考虑矩阵$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$m\geq n$。假设 A 共有k个非零的奇异值$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_k$，$1\leq k\leq n$，并且令

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_k\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{k\times k}$$

为对角元是$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k$的对角阵。

1. 证明存在$U\in\mathbb{R}^{m\times k}$和$V\in\mathbb{R}^{n\times k}$满足$U^TU=I$和$V^TV=I$（I表示单位矩阵），

使得 $A = U\Sigma V^T$。另外，这样的U 和 V是否一定唯一？为什么？（10 分）

2. 证明上述V的每一列均为A^TA的一个特征向量。另外，找出其对应的特征值。（6 分）

3. 令$y \in \mathbb{R}^n$并假设A的秩为n。用上述U，V，Σ 以及 y 来表示线性方程组 $Ax = y$ 的最小二乘解。（7 分）

4. 现在考虑$m = n = k$的情况。证明A 关于 2 范数的条件数

$$\kappa_2(A) = \| A \|_2 \cdot \| A^{-1} \|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_k}$$

（7 分）

三、假设我们获得了 m 组数据(s_i, g_i)，$i = 1,2,\ldots,m$，$s_i \in \mathbb{R}$，$g_i \in \mathbb{R}$，并希望找到$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$，$1 < n \ll m$ 使得$\sum_{i=1}^{m}(x_n s_i^{n-1} + x_{n-1} s_i^{n-2} + \cdots + x_2 s_i + x_1 - g_i)^2$最小。已知上述问题可以表达成一个最小二乘问题$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \| Ax - b \|_2$，其中$x = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T \in \mathbb{R}^n$。

1. 用(s_i, g_i)，$i = 1,2,\ldots,m$表示出最小二乘问题中的矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$和向量$b \in \mathbb{R}^m$。（8 分）

2. 上述最小二乘问题的最小二乘解是否一定唯一？如果是，请阐述理由；否则请提供数据(s_i, g_i)，$i = 1,2,\ldots,m$需要满足的条件，以使最小二乘解唯一。（7 分）

3. 现假设该最小二乘问题具有唯一的最小二乘解。我们对 A 进行 QR 分解，得到

$$A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中$Q = [q_1 \quad \cdots \quad q_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$是正交矩阵，$R \in \mathbb{R}^{n\times n}$是上三角阵。证明R 为满秩。另外，用$q_1, \cdots, q_m \in \mathbb{R}^m$，R以及 b 来表示该最小二乘解。（10 分）

4. 继续假设该最小二乘问题具有唯一的最小二乘解。写出采用最速下降法解决该最小二乘问题的算法形式。方便起见，算法可直接使用A 和 b 进行表示。（10 分）

四、考虑采用共轭梯度法求解线性方程组$Ax = b$，其中$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$为对称正定矩阵，$b \in \mathbb{R}^n$。令$x^* \in \mathbb{R}^n$为该线性方程组的解。已知共轭梯度法可表达成以下形式：

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k\,,\quad k = 0,1,2,\cdots$$

其中$\alpha_k \in \mathbb{R}$为步长，$d_k \in \mathbb{R}^n$为搜索方向，$x_k \in \mathbb{R}^n$为k次迭代后对于x^*的估计值。已知共轭梯度法的搜索方向满足$\mathrm{span}\{d_0, \cdots, d_k\} = \mathrm{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \cdots, A^k r_0\}$，

其中$r_0 = b - Ax_0$。

1. 证明对于所有的$k \ge 1$，

$$b - Ax_k \in r_0 + A \cdot \mathrm{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \cdots, A^{k-1}r_0\}$$

（7 分）

2. 已知共轭梯度法产生的序列$\{x_k\}$满足

$$\sqrt{(x_k - x^*)^T A (x_k - x^*)} \le 2\left(\frac{\sqrt{\kappa_2(A)} - 1}{\sqrt{\kappa_2(A)} + 1}\right)^k \sqrt{(x_0 - x^*)^T A (x_0 - x^*)},\quad k = 0,1,2,\cdots$$

其中$\kappa_2(A) = \| A \|_2 \cdot \| A^{-1} \|_2$ 为 A 关于 2 范数的条件数。根据上面的不等式给出$\{x_k\}$关于 1 范数的收敛速度，即找出$C > 0$和$q \in (0,1)$，使得

$$\| x_k - x^* \|_1 \le C q^k \| x_0 - x^* \|_1\,,\quad k = 0,1,2,\cdots$$

（10 分）

3. 令$k \ge 2$。假设存在$z \in x_0 + \mathrm{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \cdots, A^{k-1}r_0\}$使得不等式$\frac{1}{2}z^T Az - b^T z \le \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$对于所有的$x \in x_0 + \mathrm{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \cdots, A^{k-1}r_0\}$都成立。找出z和共轭梯度法产生的 x_k之间的关系。（5 分）

4. 现在令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

并且让共轭梯度法的初始值$x_0 = [0 \quad 0]^T$。求出共轭梯度法每次迭代产生的步长和搜索方向。（8 分）

五、考虑采用具有如下形式的单步线性定常迭代法求解线性方程组$Ax = b$，其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$为非奇异，$b \in \mathbb{R}^n$：

$$x_{k+1} = Mx_k + g,\qquad k = 0,1,2\cdots$$

其中$M \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$g \in \mathbb{R}^n$，$x_k \in \mathbb{R}^n$。

1. 证明如果$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|M_{ij}| < 1$，其中$M_{ij} \in \mathbb{R}$为矩阵M第i行第j列的元素，那么上述单步线性定常迭代法产生的序列$\{x_k\}$收敛。（5 分）

2. 现假设$n = 5$。把上述单步线性定常迭代法中的M分别取为$M_1 \in \mathbb{R}^{5\times 5}$和$M_2 \in \mathbb{R}^{5\times 5}$，且已知 M_1有两个复数特征值$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j$，$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$ 和三个实数特征值$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10}$， M_2有两个复数特征值$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}j$，$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}j$ 和三个实数特征值$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$。那么这两个单步线性定常迭代法各自产生的序列$\{x_k\}$是否收敛？为什么？（8 分）

3. 如果采用幂法求解题 2 中M_1和M_2的谱半径，那么哪个矩阵对应的幂法收敛速度更快？为什么？（4 分）

4. 假设$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$。如果选择$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$，是否能够让上述单步线性定常迭代法收敛到$Ax = b$的解？如果能够实现，选择一个合适的g; 如果不能实现，请说明原因。（8 分）